ТЕМА 7 ОЦЕНКА СОСТОЯНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ И ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ

7.1. Двойственность задач оценки состояния стохастических систем и оптимального управления для линейных детерминированных систем

С теорией оптимального управления тесно связаны задачи теории оценивания, которая является отдельным достаточно полно разработанным направлением. Ограничимся рассмотрением задачи оценивания состояния стохастических систем с непрерывным временем [4, 8].

Пусть стохастический процесс с непрерывным временем задается соотношениями [8]:

$$dx = A(t)x(t)dt + d\upsilon \quad , \tag{7.1}$$

$$dy = C(t)x(t)dt + de, \tag{7.2}$$

где $x(t)$ – n-мерный вектор состояния, $y(t)$ – p-мерный вектор наблюдений. Считаем: $x(t_0)$ – исходное состояние, математическое ожидание $Mx(t_0) = m$ – известный вектор, R_0 – ковариационная матрица состояния $x(t_0)$.

Предположим, что $\{\upsilon(t), t \in T\}$, $\{e(t), t \in T\}$ – стохастические процессы с некоррелированными приростами и с ковариационными функциями $R_1(s,t)$ и $R_2(s,t)$ соответственно, $s \in T, t \in T, T = \{t : -\infty < t < \infty\}$, процессы $\{\upsilon(t), t \in T\}$, $\{e(t), t \in T\}$ – взаимно некоррелированные и не коррелированы со случайным вектором $x(t_0)$.

Считаем, что $A(t), C(t)$ – заданные матрицы соответствующих размерностей, элементы которых являются непрерывными функциями времени t.

Предположим, что выходной сигнал $y(t)$ наблюдается на интервале (t_0, t_1). Требуется найти наилучшую оценку вектора состояния в момент времени t_1. Для полной постановки задачи нужно задать вид допустимых оценок и указать, какая оценка считается наилучшей.

По наблюдениям $y(t)$ на (t_0, t_1) будем искать оценку скалярного произведения $a^T x(t_1)$ в виде, линейном по $y(t)$:

$$a^T \hat{x}(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} u^T(t) dy(t) + b^T m \ , \tag{7.3}$$

где a – произвольный заданный постоянный вектор, b – постоянный вектор, который определяется из условия несмещенности оценки, $u(t)$ – p-мерная вектор-функция, что считается непрерывной по t и является неизвестной. Знак "–" в формуле (7.3) поставлен с целью получения конечного результата в более компактной форме.

Таким образом, оценки вида (7.3) считаются допустимыми.

Наилучшую оценку будем искать из критерия:

$$M[a^T \hat{x}(t_1) - a^T x(t_1)]^2 \to \inf \ , \tag{7.4}$$

где $\inf$ берется по всем допустимым оценкам.

Итак, задача оценивания поставлена.

В такой постановке задача оценивания сводится к нахождению функции $u(t)$ и постоянного вектора b, которые являются неизвестными.

Покажем, что задача оценки состояния стохастической системы является двойственной к задаче управления детерминированной системой.

Для этого перепишем критерий в другом виде. Из (7.2) и (7.3) получим:

$$\begin{aligned} a^T \hat{x}(t_1) &= -\int_{t_0}^{t_1} u^T(t) dy(t) + b^T m = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [u^T(t) C x(t) dt + u^T(t) de(t)] + b^T m. \end{aligned} \tag{7.5}$$

В дальнейшем зависимость величин от t там, где это не будет вызывать недоразумений, будем опускать.

Введем вектор z как решение дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dt} = -A^T z - C^T u \tag{7.6}$$

с начальным условием

$$z(t_1) = a\ . \tag{7.7}$$

Тогда будем иметь:

$$a^T x(t_1) = z^T(t_1)x(t_1) = z^T(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} d[z^T(t)x(t)]\,. \tag{7.8}$$

Учитывая (7.1), (7.7), можем записать:

$$\begin{aligned} &d[z^T x] = dz^T x + z^T dx = \\ &= -z^T Axdt - u^T Cxdt + z^T Axdt + z^T d\upsilon = \\ &= -u^T Cxdt + z^T d\upsilon. \end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в (7.8):

$$a^T x(t_1) = z^T(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} d[-u^T Cx(t)dt + z^T d\upsilon(t)]\,. \tag{7.9}$$

Из (7.5) и (7.9) находим:

$$\begin{aligned} &a^T[x(t_1) - \hat{x}(t_1)] = \\ &= z^T(t_0)x(t_0) - b^T m + \int_{t_0}^{t_1} d[u^T(t)de(t) + z^T(t)d\upsilon(t)]\,. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Найдем математическое ожидание:

$$Ma^T[x(t_1) - \hat{x}(t_1)] = [z(t_0) - b]^T m\ .$$

Отсюда, если положить $z(t_0) = b$, то оценка (7.5) будет несмещенной при всех a и при произвольном выборе u.

Возведем выражение (7.10) в квадрат и возьмем математическое ожидание:

$$M[a^T \hat{x}(t_1) - a^T x(t_1)]^2 = [(z(t_0) - b)^T m]^2 + z^T(t_0) R_0 x(t_0) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} [z^T(t) R_1 z(t) + u^T(t) R_2 u(t)] dt \quad (7.11)$$

Таким образом, нахождение функции u такой, что линейная оценка (7.3) является оптимальной в среднеквадратичном смысле, эквивалентно задаче оптимального управления для линейной детерминированной системы (7.6) с начальным условием (7.7) и критерием, в котором минимизируется квадратичный по u функционал:

$$z^T(t_0) R_0 x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} [z^T(t) R_1 z(t) + u^T(t) R_2 u(t)] dt \to \inf_u . \quad (7.12)$$

Таким образом, доказали теорему:

Теорема 7.1 (теорема двойственности). Задача оценки состояния системы, которая описывается соотношениями (7.1) и (7.2) при условии, что лучшая оценка ищется в классе линейных оценок вида (7.3) по среднеквадратичному критерию (7.4), эквивалентна задаче нахождения оптимального управления для линейной детерминированной системы (7.6), (7.7) с критерием оптимальности (7.12).

Задача управления, рассмотренная в теореме двойственности, несколько отличается в обозначениях от обычной формулировки ее в теории линейного оптимального управления. Чтобы облегчить сравнение, сформулируем сначала известные результаты в стандартной форме.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u , \quad (7.13)$$

с заданным начальным условием $x(t_0) = x_0$, для которой нужно найти управление, которое минимизирует функционал

$$x^T(t_1) Q_0 x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [z^T(t) Q_1 x(t) + u^T(t) Q_2 u(t)] dt . \quad (7.14)$$

Предполагаем, что матрицы Q_0, Q_1 – положительно полуопределенные, Q_2 – положительно определена. Элементы всех матриц в задаче являются кусочно-непрерывными функциями времени. Решение такой задачи известно [3,7]:

$$u = -Lx, \tag{7.15}$$

где

$$L = Q_2^{-1} B^T S, \tag{7.16}$$

где матрица S – решение матричного уравнения Риккати

$$-\frac{dS}{dt} = A^T S + SA + Q_1 - SBQ_2^{-1} B^T S \tag{7.17}$$

с начальным условием

$$S(t_1) = Q_0. \tag{7.18}$$

То есть, (7.15) – линейный по x закон управления.

Если уравнение Риккати (7.17) с условием (7.18) имеет решение, то решение (7.15), (7.16) приведенной задачи оптимального управления существует и является единственным [7, 10].

Таким образом, из сравнения со стандартным формулировкой следует, что задача (7.6), (7.7), (7.12), которая рассмотрена в теореме 7.1, имеет решение:

$$u(t) = -K^T z(t), \tag{7.19}$$

где

$$K = PC^T R_2^{-1}, \tag{7.20}$$

матрица P – решение матричного уравнения Риккати:

$$\frac{dP}{dt} = AP + PA^T + R_1 - PC^T R_2^{-1} CP \tag{7.21}$$

с начальным условием

$$P(t_0) = R_0.$$

Ниже эквивалентность задачи оценивания состояния (7.6), (7.7), (7.12) и стандартной задачи оптимального управления (7.13), (7.14) проиллюстрирована таблицей, в которой указана соответствие обозначений:

Стандартная задача оптимального управления	Задача оценки состояния
t	$-t$
t_0	t_1
t_1	t_0
A	A^T
B	C^T
Q_0	R_0
Q_1	R_1
Q_2	R_2
S	P
L	K^T

7.2. Фильтр Калмана – Бьюси

В реальных системах управления часто используется фильтр Калмана - Бьюси, который дает оценки текущих фазовых координат, а потому входит в состав обратной связи системы. Для построения фильтра Калмана - Бьюси воспользуемся результатами, полученными выше.

Итак, с помощью детерминированной теории управления была определена функция u в виде (7.19), которая дает наилучшую оценку. Запишем этот результат так, чтобы получить для оценки стохастическое дифференциальное уравнение.

Оценка задается формулой (7.5):

$$a^T \hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} u^T(t) dy(t) + b^T m$$

где u определяется (7.19), (7.20).

С целью получения стохастического дифференциального уравнения продифференцируем выражение (7.5). Заметим, что u и b неявно зависят от t_1. Поэтому перепишем (7.5) в таком виде, в котором эта зависимость будет явной.

Из уравнения (7.6) с учетом (7.19) находим:

$$\frac{dz}{dt} = -A^T z - C^T u = -(A - KC)^T z\,. \tag{7.22}$$

Пусть матрица $\psi(t, t_1)$ – решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\psi}{dt} = (A - KC)\psi \tag{7.23}$$

с условием

$$\psi(t_1, t_1) = I, \tag{7.24}$$

где I – единичная матрица соответствующей размерности.

Тогда решение уравнения (7.22) с начальным условием (7.7): $z(t_1) = a$ равно:

$$z(t) = \psi^T(t_1, t)a\,. \tag{7.25}$$

Итак,

$$u(t) = -K^T \psi^T(t_1, t)a\,, \tag{7.26}$$

$$b = z(t_0) = \psi^T(t_1, t_0)a\,. \tag{7.27}$$

Тогда выражение (7.5) для оценки примет вид:

$$a^T \hat{x}(t_1) = a^T \int_{t_0}^{t_1} \psi(t_1, t) K dy(t) + a^T \psi(t_1, t_0) m \tag{7.28}$$

Значит, если выберем

$$\hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t_1, t) K dy(t) + \psi(t_1, t_0) m\,, \tag{7.29}$$

то получим оценку $\hat{x}$ такую, что среднеквадратичная погрешность оценивания будет минимальной при всех a.

Дифференцируем выражение (7.29) и получаем

$$d\hat{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial \psi(t_1,t)}{\partial t_1} Kdy(t) + \frac{\partial \psi(t_1,t_0)}{\partial t_1} m] dt_1 + Kdy(t_1) =$$

$$= (A - KC)\hat{x}(t_1)dt_1 + Kdy(t_1) = \qquad (7.30)$$

$$= A\hat{x}(t_1)dt_1 + K[dy(t_1) - C\hat{x}(t_1)dt_1].$$

Таким образом, линейная оценка, которая минимизирует средне-квадратичную погрешность оценки, удовлетворяет линейное стохастическое дифференциальное уравнение (7.30).

Начальное значение оценки получим с учетом условия (7.29):

$$\hat{x}(t_0) = m.$$

Вычтем (7.30) из (7.1) и найдем, что вектор погрешности оценки $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ удовлетворяет линейное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$d\tilde{x} = (A - KC)\tilde{x}dt_1 + d\upsilon - Kde\,. \qquad (7.31)$$

Для ковариации погрешности оценки можно получить дифференциальное уравнение [8]:

$$\frac{dQ}{dt} = AQ + QA^T + R_1 - KCQ \_ QC^T K^T + KR_2K^T =$$

$$= AQ + QA^T + R_1 - PC^T R_2^{-1} CQ - QC^T R_2^{-1} CP + PC^T R_2^{-1} CP \qquad (7.32)$$

с начальным условием

$$Q(t_0) = R_0 \quad . \qquad (7.33)$$

Вычтем уравнение (7.32) из уравнения (7.21) и получим:

$$\frac{d(Q-P)}{dt} =$$

$$= A(Q-P) + (Q-P)A^T - (Q-P)C^T R_2^{-1} CP - PC^T R_2^{-1} C(Q-P).$$

Поскольку $Q(t_0) = P(t_0) = R_0$, то $Q(t) = P(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ [8].

Таким образом, ковариация погрешности оценки определяется уравнением (7.21) с начальным условием $P(t_0) = R_0$.

Итак, учитывая, что момент времени t_1 может выбираться произвольно, доказали теорему.

Теорема 7.2 (Калмана – Бьюси). Линейная оценка вектора состояния для системы, которая описывается соотношениями (7.1), (7.2), удовлетворяет стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\hat{x}(t) = A\hat{x}dt + K[dy - C\hat{x}dt], \tag{7.34}$$

$$\hat{x}(t_0) = Mx(t_0) = m, \tag{7.35}$$

где $K = PC^T R_2^{-1}$, P – ковариация погрешности оценки, которая удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dP}{dt} = AP + PA + R_1 - PC^T R_2^{-1} CP,$$

$$P(t_0) = R_0.$$

Замечание 7.1. Поскольку уравнение (7.34) является стохастическим дифференциальным уравнением, то его решение можно представить только с помощью стохастических интегралов [8].

Замечание 7.2. При условии, что стохастические процессы $\{x(t), t \in T\}$ и $\{y(t), t \in T\}$ имеют гауссово распределение, условное деление $x(t)$ относительно известного $y(s), t_0 \le s \le t$ также будет гауссовым с условным математическим ожиданием $M\, x/y = \hat{x}$ и условной ковариации P [8].

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М., 1983.

2. Беллман Р. Динамическое программирование. – М., 1960.

3. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. – М., 1972.

4. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К., 1975.

5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М., 1980.

6. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М., 1975.

7. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. – М., 1975.

8. Острем К. Введение в стохастическую теорию оптимального управления. – М., 1973.

9. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М., 1968.

10. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М., 1978.

Дополнительная

11. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М., 1979.

12. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными обьектами. – М., 1976.

13. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. – М., 1971.

14. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. – М., 1984.

15. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. – К., 1983.

16. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М., 1969.

17. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. – К., 1985.

18. Бублик Б.Н., Данилов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах / Учеб. пособие. – К., 1988.

19. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. – М., 1971.

20. Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. – М., 1969.

21. Зайцев Г.Ф., Костюк В.И., Чинаев П.И. Основы автоматического управления и регулирования. – К., 1977.

22. Иванов В.А., Фалдин Н.В. Теория оптимальных систем автома тического регулирования. – М., 1981.

23. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. – М., 1971.

24. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М., 1973.

25. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М., 1972.

26. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск, 1974.

27. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М., 1981.

28. Пропой А.И. Элементы теории дискретных оптимальных процессов. – М., 1973.

29. Растригин Л.А. Современные принципы управления сложными сис темами. – М., 1980.

30. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. III. Оптимальное управление системами. – М., 1982.

31. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управ ления. – М., 1978.

32. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. – М., 1977.

33. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М., 1969.